

2020年天津河北区高三一模数学试卷

一、选择题

(本大题共9小题, 每小题5分, 共45分)

1. 已知集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, 则集合 $\complement_U(A \cup B) = (\quad)$.

- A. $\{5\}$ B. $\{1, 5\}$ C. $\{2, 4\}$ D. $\{1, 2, 3, 4, 6\}$

2. 已知 $a \in \mathbf{R}$, 则 " $a > 2$ " 是 " $a^2 > 4$ " 的()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

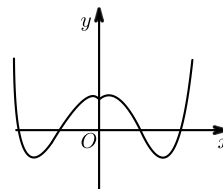
3. 已知直线 $l: x + ay = 2$ 与圆 $C: x^2 + y^2 = 4$ 相交于 M, N 两点, 若 $|MN| = 2\sqrt{3}$, 则直线 l 的斜率为() .

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. $-\sqrt{3}$

4. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的焦距为4, $A(2, 3)$ 为 C 上一点, 则 C 的渐近线方程为() .

- A. $y = \pm \frac{1}{2}x$ B. $y = \pm x$ C. $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$ D. $y = \pm \sqrt{3}x$

5. 已知某函数的大致图象如图所示, 则该图象所对应的函数可能是() .

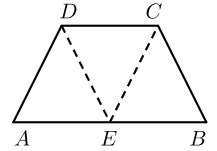


- A. $y = \frac{x}{2^{|x|}}$ B. $y = 2^{|x|} - 2$ C. $y = e^{|x|} - |x|$ D. $y = 2^{|x|} - x^2$

6. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 单调递增, 设 $a = f\left(\frac{3}{2}\right)$, $b = f(\log_3 7)$, $c = f(-0.8^3)$, 则 a, b, c 的大小关系为 () .

A. $b < a < c$ B. $c < b < a$ C. $c < a < b$ D. $a < c < b$

7. 如图, 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel DC$, $AB = 2DC = 2AD = 2$, $\angle DAB = 60^\circ$, E 为 AB 的中点, 将 $\triangle ADE$ 与 $\triangle BEC$ 分别沿 ED 、 EC 向上折起, 使 A, B 重合为点 F , 则三棱锥 $F-DCE$ 的外接球的体积是 () .

A. $\frac{\sqrt{6}}{8}\pi$ B. $\frac{\sqrt{6}}{4}\pi$ C. $\frac{3}{2}\pi$ D. $\frac{2}{3}\pi$

8. 将函数 $f(x) = \cos \frac{\omega x}{2} \left(2 \sin \frac{\omega x}{2} - 2\sqrt{3} \cos \frac{\omega x}{2} \right) + \sqrt{3}$ ($\omega > 0$) 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3\omega}$ 个单位, 得到函数 $y = g(x)$ 的图象, 若 $y = g(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 上为增函数, 则 ω 的最大值为 () .

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, & x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x) = ax - a$ 恰有 1 个实根, 则实数 a 的取值范围是 () .

A. $[-1, 0] \cup [1, +\infty)$ B. $(-\infty, -1] \cup [0, 1]$ C. $[-1, 1]$ D. $(-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$

二、填空题

(本大题共6小题, 每小题5分, 共30分)

10. 设复数 $z = \frac{1-i}{1+i}$ (i 为虚数单位), 则 $|z| =$ _____ .

11. 在 $\left(2x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$ 的展开式中, x^2 的系数为 _____ .

12. 从某班的4名男生, 2名女生中任选3人参加学校组织的社会实践活动. 设所选3人中女生人数为 X , $P(X=2) =$ _____, 数学期望 $E(X) =$ _____ .

13. 已知 a, b 为正实数, 且 $a + b = 2$, 则 $\frac{a^2 + 2}{a} + \frac{b^2}{b + 1}$ 的最小值为_____.

14. 已知 $\triangle ABC$ 是边长为2的等边三角形, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EC}$, 且 AD 与 BE 相交于点 O , 则 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} =$ _____.

15. 某同学在研究函数 $f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$ ($x \in \mathbf{R}$)时, 给出下面几个结论:

①等式 $f(-x) + f(x) = 0$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立;

②函数的值域为 $(-1, 1)$;

③若 $x_1 \neq x_2$, 则一定 $f(x_1) \neq f(x_2)$;

④函数 $g(x) = f(x) - x$ 在 $\mathbf{R}$ 上有三个零点.

其中正确的结论的序号是_____ (写出所有正确结论的序号).

三、解答题

(本大题共5小题 , 共75分)

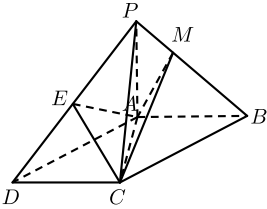
16. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 满足 $2c = \sqrt{3}a + 2b \cos A$.

(1) 求角 B .

(2) 若 $\cos A = \frac{1}{4}$, 求 $\sin(2A + B)$ 的值.

(3) 若 $c = 7, b \sin A = \sqrt{3}$, 求 b 的值.

17. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 底面 $ABCD$ ，底面 $ABCD$ 为平行四边形， $AB \perp AC$ ，且 $PA = AB = 3$ ， $AC = 2$ ， E 是棱 PD 的中点。



- (1) 求证： $PB \parallel$ 平面 AEC .
- (2) 求直线 PC 与平面 AEC 所成角的正弦值 .
- (3) 在线段 PB 上 (不含端点) 是否存在一点 M ，使得二面角 $M - AC - E$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$? 若存在，确定 M 的位置；若不存在，说明理由 .

18. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，公比 $q > 1$ ，且 $a_2 + 1$ 为 a_1, a_3 的等差中项， $S_3 = 14$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

(2) 记 $b_n = a_n \cdot \log_2 a_n$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

19. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率 $e = \frac{1}{2}$, 直线 $x + y - \sqrt{6} = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 = b^2$ 相切.

(1) 求椭圆的方程.

(2) 过点 $N(4, 0)$ 的直线 l 与椭圆交于不同两点, 线段 A, B 的中垂线为 l' , 若 l' 在 y 轴上的截距为 $\frac{4}{13}$, 求直线 l 的方程.

20. 已知函数 $f(x) = \ln x + ax^2 + (a+2)x + 1 (a \in \mathbf{R})$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性 .

(2) 设 $a \in \mathbf{Z}$, 若对任意的 $x > 0$, $f(x) \leq 0$ 恒成立 , 求整数 a 的最大值 .

(3) 求证 : 当 $x > 0$ 时 , $e^x - x \ln x + 2x^3 - x^2 + x - 1 > 0$.